ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I» (ФГБОУ ВО ПГУПС)

Калининградский филиал ПГУПС

УТВЕРЖДАЮ
Начальник Управления
по работе с филиалами

Е.В. Панюшкина
«10» января 2020 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

для специальности

08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство

базовая подготовка,
на базе среднего общего образования

Форма обучения: очная

Нормативные сроки обучения: 2 года 10 месяцев

Начало подготовки: 2020 год

г. Калининград
2020

Пояснительная записка

Методические указания для студентов по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.01 Прикладная математика для специальности 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство.

Содержание и объем практических работ соответствует требованиям учебному плану.

Практические занятия по дисциплине Прикладная математика проводятся с целью закрепления теоретического материала и приобретения практических навыков после изучения теоретической части соответствующих тем.

Данное пособие содержит 12 практических работ, которые за время обучения должны выполнить обучающиеся под руководством преподавателя.

В результате выполнения практических работ обучающиеся должны:

уметь:

- использовать методы линейной алгебры;
- решать основные прикладные задачи численными методами; знать:
- основные понятия и методы основ линейной алгебры, математического анализа, теории вероятностей;
- основные численные методы решения прикладных задач.

Методические указания по выполнению практических работ рассчитаны на 24 часа и содержат 8 практических работ, перечисленных в рабочей программе по дисциплине Прикладная математика

В начале каждой работы, помещены основные определения, теоремы, формулы и другие краткие сведения по теории, и методические указания, необходимые для решения последующих задач. Затем приводятся подробные решения типовых задач и примеров с краткими пояснениями теоретических положений; в конце каждой практической работы содержатся заданий для самостоятельного решения, контрольные вопросы.

Каждый студент оформляет практическую работу, которая оценивается преподавателем.

Требования к выполнению практических работ:

-работа должна быть оформлена в файловую папку; каждая работа выполняется на листах формата А4;

-на титульном листе указывается: учебное заведение, вид работы, наименование дисциплины, ФИО студента, № группы, ФИО преподавателя;

-при выполнении указывается № практического занятия, тема, цель; условия заданий переписываются полностью;

-каждое задание сопровождается формулами, оформленными записями и расчетами; -в конце каждого задания необходимо записать ответ.

Критерии оценивания практических работ:

1) оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения;

2) оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий;

3) оценка «3» ставится, если выполнено 60% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет;

4) оценка «2» - решено менее 60% предлагаемых заданий.

При выполнении практических работ обучающиеся приобретают навыки и умения самостоятельной работы с учебной, справочной и технической литературой, что пригодится им в дальнейшей профессиональной деятельности.

Практическое занятие 1

Комплексные числа и действия над ними. Решение задач для нахождения полного сопротивления электрической цепи переменного тока с помощью комплексных чисел.

Цель: закрепить практические навыки решения задач с применением теории комплексных чисел; сформировать умения находить полное сопротивление электрической цепи переменного тока с помощью комплексных чисел.

Краткие теоретические сведения

Нахождение полного сопротивления электрической цепи переменного тока с помощью комплексных чисел

Расчет линейных электрических схем переменного тока аналогичен расчету электрических схем постоянного тока. В обоих случаях составляют систему алгебраических уравнений по методам, основанным на законах Ома и Кирхгофа.

Для схем постоянного тока уравнения составляют по действительным значениям напряжений, токов, сопротивлений и проводимостей. В схемах же переменного тока для уравнений применяют комплексные величины: U, I, $Z=R+jX$. При этом все параметры записывают в виде комплексных чисел в алгебраической показательной или тригонометрической форме. При переходе от интегрально-дифференциальных уравнений дифференцирование мгновенного значения заменяют умножением jω на соответствующую комплексную величину, а интегрирование — делением комплексной величины на jω:

$$\frac{di}{dt} \to j\omega I, \quad \int i dt \to \frac{I}{j\omega}$$

если $i = I_m cos\,(\omega t + \varphi)$.

Полученную систему алгебраических уравнений решают относительно неизвестного комплексного параметра, например, тока $I = I_m e^{j\varphi}$. При необходимости совершают переход от комплексной величины к ее мгновенному значению.

Алгоритм расчета комплексным методом

1. Мгновенные значения напряжений источников ЭДС, токов источников тока заменяют соответствующими комплексными значениями, например, $u = U_m cos\,(\omega t + \varphi)$ заменяют $U = U_m e^{j\varphi}$, $i = I_m cos\,(\omega t + \varphi)$ заменяют $I = I_m e^{j\varphi}$.

2. Комплексные сопротивления $Z = R + jX$ всех ветвей схемы записывают в зависимости от выбранного метода расчета.

3. Алгебраические уравнения решают относительно искомой комплексной величины, например, тока $I = I_m e^{j\varphi}$.

4. При необходимости переходят к мгновенному значению

$i = I_m cos\,(\omega t + \varphi)$.

В любой момент времени сумма мгновенных значений напряжений на последовательно включенных элементах цепи равна мгновенному значению приложенного напряжения (Рис. 1):

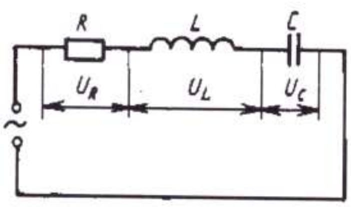

Рис. 1.

$$u = u_R + u_L + u_c.$$

Во всех последовательно включенных элементах цепи изменения силы тока происходят практически одновременно, так как электромагнитные взаимодействия распространяются со скоростью света. Поэтому можно считать, что колебания силы тока во всех элементах последовательной цепи происходят по закону:

$$i = I_m e^{j\omega \cdot t}$$

Колебания напряжения на резисторе совпадают по фазе с колебаниями силы тока

$$u_R = i \cdot R = I_m \cdot R \cdot e^{j\omega \cdot t},$$

а колебания напряжения на катушке опережают по фазе колебания силы тока на $\pi/2$.

$$u_L = L\frac{di}{dt} = j\omega \cdot L \cdot e^{j\omega \cdot t} = Z_L \cdot I_m e^{j\omega t},$$

где

$$Z_L = j\omega \cdot L \cdot,$$

колебания напряжения на конденсаторе отстают по фазе на $\pi/2$ от колебаний силы тока

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i \cdot dt = \frac{I_m}{j\omega C} e^{j\omega \cdot t} = \frac{I_m j}{j^2 \omega C} e^{j\omega \cdot t} = -\frac{j}{\omega C} I_m e^{j\omega t},$$

где

$$Z_C = -\frac{j}{\omega \cdot C} I_m e^{j\omega t},$$ **(емкостное сопротивление)**

Поэтому уравнение можно записать так:

$$u = I_m R \cdot e^{j\omega t} + j\omega L \cdot I_m \cdot e^{j\omega t} - \frac{j}{\omega C} \cdot I_m \cdot e^{j\omega t} = \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) \cdot I_m \cdot e^{j\omega t}$$

согласно закону Ома:

$$Z = R + j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})$$ – комплексное сопротивление.

Таким образом, действительное число – это *активное* сопротивление, а мнимое число – *реактивное*. Общее комплексное сопротивление можно найти сложением комплексных чисел, что значительно проще метода векторных диаграмм особенно для разветвленных цепей.

Задача № 1. Необходимо получить формулу, описывающую комплексное сопротивление Z двухполюсника с двумя резисторами и двумя конденсаторами.

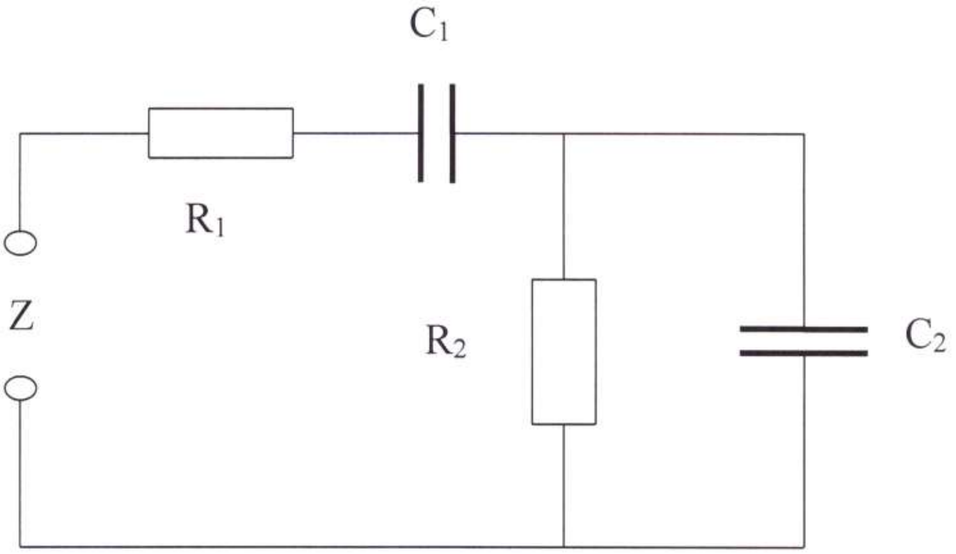

Схема цепи к задаче **№ 1**

Решение:

Искомая величина Z является суммой сопротивлений Z_1 и Z_2двух более простых цепей, одна из которых образована последовательным, а другая параллельным включением элементов:

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{j\omega C_1},$$

$$Z_2 = \frac{R_2 / (j\omega C_2)}{R_2 + 1/(j\omega C_2)}.$$

Приводя к общему знаменателя, получаем

$$Z(j\omega) = Z_1 + Z_2 = \frac{1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + j\omega (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)}{j\omega C_1 (1 + j\omega R_2 C_2)}.$$

Задания для самостоятельного решения

<u>*Задание 1.*</u>

Определите комплексное сопротивление двухполюсника (см. рис.2), если известныR_1; R_2; L; C.

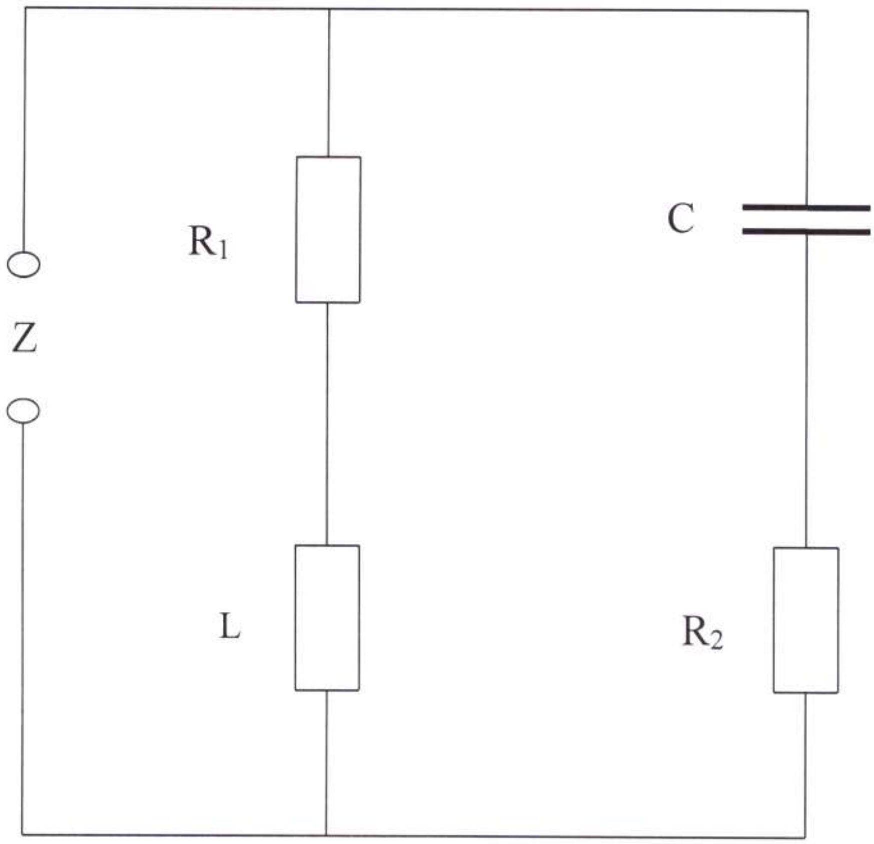

Схема цепи

Задание 2.

Выполните сложение $z_1 + z_2$, вычитание $z_1 - z_2$, умножение $z_1 \cdot z_2$ и деление $\frac{z_1}{z_2}$ двух комплексных чисел:

1.	$z_1 = -2 + 4i,\ z_2 = 1 - 8i;$	16.	$z_1 = -4i,\ z_2 = 3 - 3i;$
2.	$z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 4 + i;$	17.	$z_1 = 5 - 4i,\ z_2 = i + 1;$
3.	$z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = 2i;$	18.	$z_1 = -3i + 1,\ z_2 = 4 + i;$
4.	$z_1 = -1 + 6i,\ z_2 = 6 - i;$	19.	$z_1 = 7 - 2i,\ z_2 = 1 + 2i;$
5.	$z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = 3 - i;$	20.	$z_1 = 6 - 2i,\ z_2 = 5i;$
6.	$z_1 = 1 + 3i,\ z_2 = 2 - 5i;$	21.	$z_1 = -7 + 3i,\ z_2 = 3 - i;$
7.	$z_1 = 7 + i,\ z_2 = 7 - i;$	22.	$z_1 = 10 - 3i,\ z_2 = 2 + i;$
8.	$z_1 = -2 + 6i,\ z_2 = i;$	23.	$z_1 = 4 - 8i,\ z_2 = 1 + i;$
9.	$z_1 = i - 2,\ z_2 = 3 + 4i;$	24.	$z_1 = -2i - 6,\ z_2 = 1 - 2i;$
10.	$z_1 = 2 + 9i,\ z_2 = 4 - 5i;$	25.	$z_1 = -6 + i,\ z_2 = 4 - 2i;$
11.	$z_1 = 10 - i,\ z_2 = 10 + i;$	26.	$z_1 = 3 - 4i,\ z_2 = 3 + 4i;$
12.	$z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = 3 + 3i;$	27.	$z_1 = -3 - 2i,\ z_2 = 5 - i;$
13.	$z_1 = -1 - 2i,\ z_2 = 3i;$	28.	$z_1 = 11 - 3i,\ z_2 = 1 - i;$
14.	$z_1 = 2i,\ z_2 = 1 - 4i;$	29.	$z_1 = -2 + 5i,\ z_2 = 2i;$
15.	$z_1 = 15 - i,\ z_2 = 1 - 4i;$	30.	$z_1 = 7 + 5i,\ z_2 = 4 - 3i;$

Пример оформления задания 2:

$z_1 = -1 + 5i,\ \ z_2 = 1 - i;$

Решение:

1. Сложение:

$z_1 + z_2 = -1 + 5i + 1 - i = 0 + 4i = 4i;$

2. Вычитание:

$z_1 - z_2 = -1 + 5i - (1 - i) = -1 + 5i - 1 + i = -2 + 6i;$

3. Умножение:

$z_1 \cdot z_2 = (-1 + 5i) \cdot (1 - i) = -1 + i + 5i - 5i^2 = -1 + i + 5i - 5 \cdot (-1) = -1 + i + 5i + 5 = 4 + 6i;$

4. Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+5i}{1-i} = \frac{(-1+5i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{-1-i+5i+5i^2}{1-i^2} = \frac{-1-i+5i-5}{1+1} = \frac{-6+4i}{2} = -3+2i.$$

<u>Задание 3.</u>

Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной формах:

1.	$z = 3 + 3i$	16.	$z = -1 + i$
2.	$z = -6i$	17.	$z = -1 + \sqrt{3}i$
3.	$z = -3 - 3i$	18.	$z = 2i$
4.	$z = 1 - \sqrt{3}i$	19.	$z = \sqrt{3} - i$
5.	$z = -9i$	20.	$z = 4 - 4i$
6.	$z = -10 + 10i$	21.	$z = 3 - 3i$
7.	$z = -3 + 3i$	22.	$z = -i$
8.	$z = 8 - 8i$	23.	$z = -2i$
9.	$z = -1 - i$	24.	$z = 4 + 4i$
10.	$z = -2 - 2i$	25.	$z = 5i$
11.	$z = 16i$	26.	$z = 7 + 7i$
12.	$z = -8i$	27.	$z = -4 - 4i$
13.	$z = 17i$	28.	$z = 5 + 5i$
14.	$z = -1 - \sqrt{3}i$	29.	$z = -15i$
15.	$z = -10i$	30.	$z = -\sqrt{3} - i$

<u>Пример оформления задания 3</u>:

$z = 11 + 11 \cdot i$

<u>Решение</u>:

1. Определяем действительную и мнимую части комплексного числа:

$$a = 11,\ b = 11.$$

2. Находим модуль комплексного числа $r = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$r = \sqrt{11^2 + 11^2} = \sqrt{121 + 121} = \sqrt{2 \cdot 121} = 11\sqrt{2}.$$

3. Находим аргумент комплексного числа:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{11}{11\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{11}{11\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ радиан.

4. Получаем тригонометрическую форму комплексного числа

$$z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = 11\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

5. Получаем показательную форму комплексного числа:

$$z = r\cdot e^{\varphi\cdot i} = 11\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\cdot i}.$$

Задание 4.

Решите уравнение:

1.	$3x^2+75=0$	16.	$2x^2+8=0$
2.	$x^2+4x+6=0$	17.	$x^2+x+12{,}5=0$
3.	$x^2+6x+14=0$	18.	$x^2+2x+10=0$
4.	$2x^2-6x+5=0$	19.	$x^2-2x+2=0$
5.	$2x^2+4x+7=0$	20.	$x^2-x+1=0$
6.	$x^2+6x+25=0$	21.	$x^2+3x+6{,}25=0$
7.	$4x^2+64=0$	22.	$x^2+2x+3=0$
8.	$x^2+3x+3=0$	23.	$x^2+5x+7=0$
9.	$x^2-5x+2=0$	24.	$3x^2+243=0$
10.	$x^2+x+1=0$	25.	$x^2+4x+5=0$
11.	$2x^2+2x+1=0$	26.	$x^2+6x+10=0$
12.	$x^2-2x+5=0$	27.	$-5x^2-125=0$
13.	$x^2+2x+2=0$	28.	$2x^2-x+5=0$
14.	$6x^2-2x+1=0$	29.	$3x^2-x+2=0$
15.	$2x^2-2x+1=0$	30.	$5x^2+7x+3=0$

Пример оформления задания 4:

$x^2-6x+25=0$

Решение:

$a=1,\ b=-6,\ c=25.$

$D=b^2-4\cdot a\cdot c=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 25=36-100=-64=64\cdot(-1)=64\cdot i^2$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{6-\sqrt{64\cdot i^2}}{2}=\frac{6-8i}{2}=3-4i;$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{6+\sqrt{64\cdot i^2}}{2}=\frac{6+8i}{2}=3+4i.$$

Ответ: $3\pm 4i.$

Практическое занятие 2

Построение графа по условию ситуационных задач: в управлении инфраструктурами на транспорте; в структуре взаимодействия различных видов транспорта.

Цель: приобретение практических умений и навыков решения ситуационных задач с использованием основные понятия теории графов.

Задача №1. Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурий; Меркурий – Вене; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпитер; Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса?

Решение: Нарисуем схему условия: планеты изобразим точками, а маршруты ракет – линиями.

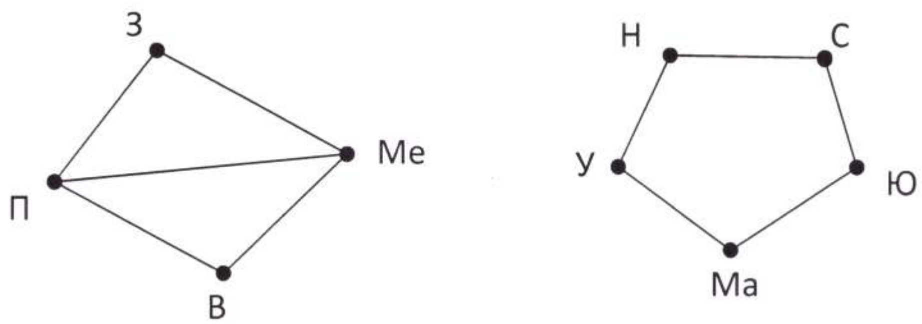

Рис. 1.

Теперь сразу видно, что долететь с Земли до Марса нельзя.

Задача № 2. Доска имеет форму двойного креста, который получается, если из квадрата 4х4 убрать угловые клетки.

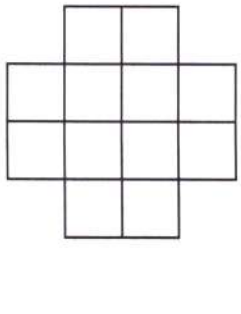

Рис. 2.

Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходную клетку, побывав на всех клетках ровно по одному разу?

Решение: Занумеруем последовательно клетки доски:

	1	2	
3	4	5	6
7	8	9	10
	11	12	

Рис. 3.

А теперь с помощью рисунка покажем, что такой обход таблицы, как указано в условии, возможен:

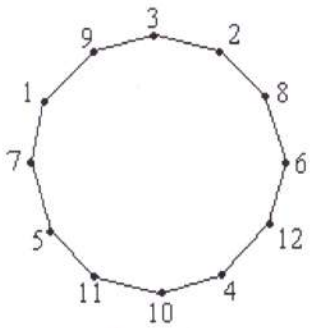

Рис. 4.

Мы рассмотрели две непохожие задачи. Однако решения этих двух задач объединяет общая идея – представление решения с помощью графа. Заметим, что не каждая картинка такого вида будет называться графом. Например, если вас попросят нарисовать в тетради пятиугольник, то такой рисунок графом не будет.

Задача №3. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Решение: Допустим, что такое соединение телефонов возможно. Тогда представим себе граф, в котором вершины обозначают телефоны, а ребра – провода, их соединяющие. Подсчитаем, сколько всего получится проводов. К каждому телефону подключено ровно 5 проводов, то есть степень каждой вершины нашего графа – *5.* Чтобы найти число проводов, надо просуммировать степени всех вершин графа и полученный результат разделить на 2 (т.к. каждый провод имеет два конца, то при суммировании степеней каждый провод будет взят 2 раза).

Но тогда количество проводов получится разным $15 \cdot \frac{5}{2} = 37{,}5$. Но это число не целое. Значит наше предположение о том, что можно соединить каждый телефон ровно с пятью другими, оказалось неверным.

Ответ. Соединить телефоны таким образом невозможно.

Теорема: Любой граф содержит четное число нечетных вершин.

Доказательство: Количество ребер графа равно половине суммы степеней его вершин. Так как количество ребер должно быть целым числом, то сумма степеней вершин должна быть четной. А это возможно только в том случае, если граф содержит четное число нечетных вершин.

Связность графа

Есть еще одно важное понятие, относящееся к графам – понятие связности.

Граф называется *связным,* если любые две его вершины можно соединить *путем, то есть* непрерывной последовательностью ребер. Существует целый ряд задач, решение которых основано на понятии связности графа.

Задача №4. В стране N 15 городов, каждый из городов соединен железной дорогой не менее чем с семью другими. Докажите, что из каждого города можно добраться в любой другой.

Доказательство: Рассмотрим два произвольных A и B города и допустим, что между ними нет пути. Каждый из них соединен железной дрогой не менее чем с семью другими, причем нет такого города, который был бы соединен с обоими рассматриваемыми городами (в противном случае существовал бы путь из A в B). Нарисуем часть графа, соответствующую этим городам:

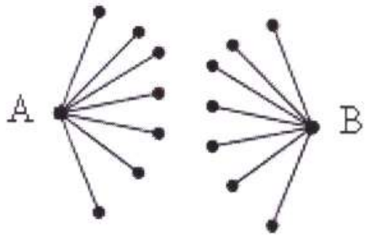

Рис. 5.

Теперь явно видно, что мы получили не менее различных 16 городов, что противоречит условию задачи. Значит утверждение доказано от противного.

Если принять во внимание предыдущее определение, то утверждение задачи можно переформулировать и по-другому: «Доказать, что граф дорог страны N связен».

Теперь вы знаете, как выглядит связный граф. Несвязный граф имеет вид нескольких «кусков», каждый из которых – либо отдельная вершина без ребер, либо связный граф. Пример несвязного графа вы видите на рисунке:

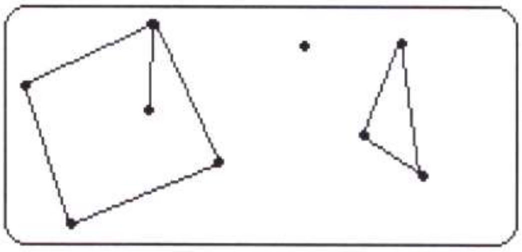

Рис. 6.

Каждый такой отдельный кусок называется *компонентой связности графа.* Каждая компонента связности представляет собой связный граф и для нее выполняются все утверждения, которые мы доказали для связных графов.

Рассмотрим пример задачи, в которой используется компонента связности:

Задача №5. В Тридевятом царстве только один вид транспорта – поезд. Из столицы выходит 21 дорога, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов, – по 20. Докажите, что из столицы можно доехать в город Дальний.

Доказательство: Понятно, что если нарисовать граф железных дорог Царства, то он может быть несвязным. Рассмотрим компоненту связности, которая включает в себя столицу Царства. Из столицы выходит 21 дорога, а из любых других городов, кроме города Дальний – по 20, поэтому, чтобы выполнялся закон о четном числе нечетных вершин необходимо, чтобы и город Дальний входил в эту же самую компоненту связности. А так как компонента связности – связный граф, то из столицы существует путь по дорогам до города Дальний, что и требовалось доказать.

Графы Эйлера

Вы наверняка сталкивались с задачами, в которых требуется нарисовать какую-либо фигуру, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждую линию только один раз. Оказывается, что такая задача не всегда разрешима, то есть существуют фигуры, которые указанным способом нарисовать нельзя. Вопрос разрешимости таких задач также входит в теорию графов. Впервые его исследовал в 1736 году великий немецкий математик Леонард Эйлер, решая задачу о Кенигсбергских мостах. Поэтому графы, которые можно нарисовать указанным способом, называются Эйлеровыми графами.

Задача №6. Можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

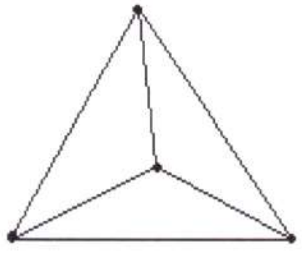

Рис.7.

Решение: Если мы будем рисовать граф так, как сказано в условии, то в каждую вершину, кроме начальной и конечной, мы войдем столько же раз, сколько выйдем из нее. То есть все вершины графа, кроме двух должны быть четными. В нашем же графе имеется три нечетные вершины, поэтому его нельзя нарисовать указанным в условии способом.

Сейчас мы доказали теорему об Эйлеровых графах:

Теорема: *Эйлеров граф должен иметь не более двух нечетных вершин.*

Задания для самостоятельного решения

1.В стране N 100 вокзалов. От любого вокзала до любого другого можно проехать. Через один из вокзалов хотят закрыть проезд так, чтобы между всеми остальными был возможен проезд. Докажите, что такой вокзал найдется.

2.В стране Z каждые 2 города соединены железными дорогами с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более, чем по двум железнодорожным путям.

3.На сайте сотрудников железных дорог ведется активная переписка, в которой участвуют пять человек. Докажите, что если каждый из пяти человек переписывается только с двумя другими, то не найдется трех человек, которые все переписываются между собой.

4.На банкет, посвященному дню рождения ОАО «РЖД», приехало множество людей из различных уголков страны. Один из гостей сказал: «Здесь не найдется девяти человек таких, чтобы каждый был знаком ровно с тремя другими». Прав ли он?

Практическая работа 3

Применение производной к решению прикладных задач.

Цель работы: научиться решать задачи на применение производной.

Краткая теория.

1. **Применение производной в физике.**

Физический смысл производной: производная есть скорость изменения физической величины.

Пример . Найти мгновенную скорость при свободном падении.

Решение. Закон свободного падения имеет вид $x = \frac{gt^2}{2}$. Мгновенная скорость при свободном падении равна: $v_{мгн}$ =x', т.е. $v_{мгн} = gt$.

Пример1 . Пусть $q = q(t)$ - количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t. Найдем силу тока в данный момент времени t

Решение. *Сила тока есть производная от количества электричества, как функции от времени, т.е.* $I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t)$,

Пример 2. Пусть дан неоднородный стержень длины l, $m = m(x)$ - масса части стержня длины x (один из концов стержня принимается за начало отсчета). Найдем линейную плотность стержня в данной точке x.

Решение. *Линейная плотность стержня в данной точке есть производная массы стержня как функции от его длины:* $\rho = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = m'(x)$,

Плотность стержня есть скорость изменения массы части стержня как функции его длины.

Решение физических задач, связанных с нахождением скорости, ускорения и т.д.

Пример 1. Дано уравнение прямолинейного движения тела: $S = 3t^2 + 2$, где S- путь, пройденный телом, м; t- время, с. Найдите скорость тела в момент времени t=1 с.

Решение. Скорость это производная пути по времени. Значит: $V = S' = 6t$ Подставив значение времени получим: $V(1) = 6\,m/c$

Пример 2. Точка движется по закону $S = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2$. Найти скорость и ускорение через 2 с после начала движения (движение считать прямолинейным).

Решение. Скорость это производная пути по времени. Значит: $V = S' = t^3 + t^2 + t$. Подставив значение времени получим $V(2) = 16\,m/c$

Пример 3. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 1 + t + t^2$. Найти его кинетическую энергию через 5 с после начала движения, если масса тела 3 кг.

Решение. Формула нахождения кинетической энергии: $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Найдем скорость тела. $V = S' = 2t + 1$, $V(5) = 11$. Кинетическая энергия тела составит: $E_k = \frac{3*121}{2} = 181{,}5$.

2. Решение экономических задач с помощью производной.

Пример 1. Выбрать оптимальный объем производства N фирмой, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостью: $F(q) = q^2 - 8q + 10$.

Решение: Оптимальный объём производства есть производная от функции прибыли, т.е. N= F(q)

$F'(q) = R'(q) - C'(q) = 2q - 8 = 0 \rightarrow q_{extr} = 4$

При $q < q_{extr} = 4 \rightarrow F'(q) < 0$ и прибыль убывает

При $q > q_{extr} = 4 \rightarrow F'(q) > 0$ и прибыль возрастает

При q = 4 прибыль принимает минимальное значение.

Ход работы.

1вариант.

1. Дано уравнение прямолинейного движения тела:, $S=2t^3-8t+2$, где S- путь, пройденный телом, м; t- время, с. Найдите скорость тела в момент времени t=3 с.

2. Точка движется по закону $S = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2$. Найти скорость и ускорение через 3 с после начала движения (движение считать прямолинейным).

3. Пусть $q=t^3 - 4t + 8$- количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t. Найдем силу тока в данный момент времени t=2с.

4. Пусть дан неоднородный стержень длины l, масса неоднородного стержня меняется по закону: $m=2x^3 - 8x + 12$. Найти линейную плотность стержня в данной точке x=4

5. Прибыль фирмы задана зависимостью : $F(q) = 4q^2 - 4q + 12$. Найти оптимальный объём производства N фирмы.

2 вариант.

1. Дано уравнение прямолинейного движения тела:, $S=3t^2-5t+2$, где S- путь, пройденный телом, м; t- время, с. Найдите скорость тела в момент времени t=4 с.

2. Точка движется по закону $S = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2$. Найти скорость и ускорение через 4 с после начала движения (движение считать прямолинейным).

3. Пусть $q= 3t^2 - 5t + 8$- количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t. Найдем силу тока в данный момент времени t=3с.

4. Пусть дан неоднородный стержень длины l, масса неоднородного стержня меняется по закону: $m=3x^2 - 5x + 12$. Найти линейную плотность стержня в данной точке x=4

5. Прибыль фирмы задана зависимостью : $F(q) = 5q^2 - 5q + 12$. Найти оптимальный объём производства N фирмы.

Практическое занятие 4

Применение интеграла к решению прикладных задач.

Цель: ознакомиться с применением интеграла для решения задач и выполнить задания.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ.

Пусть требуется найти значение какой – либо геометрической или физической величины А (площадь фигуры, объем тела, давление жидкости на вертикальную пластину и т. д.), связанной с отрезком [a, b] изменения переменной x. Для нахождения этой величины *A* можно руководствоваться методом интегральных сумм. Искомая величина $A = \int_a^b f(x)dx$.

Работа переменной силы. Пусть материальная точка *M* перемещается вдоль оси *Ox* под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки *M* из положения $x = a$ в положение $x = b$, находится по формуле: $A = \int_a^b F(x)dx$.

Пример. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению *x,* т. е. $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м; следовательно, $100 = k\ 0{,}01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа $A = \int_a^b F(x)dx = \int_0^{0{,}05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0{,}05} = 12{,}5(ДЖ)$.

Путь, пройденный телом. Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Тогда путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2. Можно определить по формуле: $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

Пример. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

Решение: Если v(t) = 10t + 2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения *(t* = 0) до конца 4-й секунды, равен S = $\int_0^4 (10t+2)dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88(м)$.

<u>Вычисление массы стержня переменной плотности.</u>

Будем считать, что отрезок [a; b] оси Ох имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geq 0$, где $\rho(x)$- непрерывная на отрезке [a; b] функция.

Общая масса этого отрезка $M = \int_a^b \rho(x)dx$

Пример. Вычислить массу стержня на отрезке от 0 до 2, если его плотность задаётся функцией $\rho(x) = x + 1$

Решение: $M = \int_a^b \rho(x)dx$, $M = \int_0^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^2 = 4$

Задания.

<u>1 вариант</u>.

1. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,08 м, если сила 120 Н растягивает пружину на 0,04 м?
2. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела
   v(t) = *8t - 3* (м/с).
3. Вычислить массу стержня на отрезке от 2 до 5, если его плотность задаётся функцией ρ(x) =2x-1

<u>2 вариант</u>.

1. .Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,08 м, если сила 120 Н растягивает пружину на 0,04 м?
2. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела
   v(t) = *8t - 3* (м/с).
3. Вычислить массу стержня на отрезке от 2 до 5, если его плотность задаётся функцией ρ(x) =2x-1

Практическое занятие 5

Применение обыкновенных дифференциальных уравнений при решении прикладных задач.

Цель: сформировать практические умения применять теорию дифференциальных уравнений при решении прикладных задач.

Пример 1: Найти закон движения тела по оси $0x$, если оно начало двигаться из точки $M(4;0)$ со скоростью $\upsilon = 2t + 3t^2$.

Решение: При прямолинейном движении скорость есть производная от пути по времени. Обозначив путь через x, имеем $\upsilon = \frac{dx}{dt}$; тогда $\frac{dx}{dt} = 2t + 3t^2$, или $dx = (2t + 3t^2)dt$. Проинтегрировав, получим $x = t^2 + t^3 + C$. Так как $x = 4$ при $t = 0$, то, подставив эти значения в общее решение, находим $C = 4$. Итак, закон движения тела имеет вид $x = t^2 + t^3 + 4$.

Пример 2: Дано уравнение скорости движения локомотива

Найти уравнение пути, если локомотив за первые 2с прошел путь 11 м.

Решение:При прямолинейном движении скорость есть производная от пути по времени.Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$v = s',$$

$$v = \frac{ds}{dt},$$

$$2t^2 - 2t + 1 = \frac{ds}{dt} \quad или \quad (2t^2 - 2t + 1) \cdot dt = ds$$

Проинтегрировав, получим $s = t^3 - t^2 + t + C$. Так как за первые 2 с локомотив прошел путь 11 м, то, подставив эти значения в общее решение, находим $C = 5$. Следовательно, уравнение пути локомотива имеет вид: $s = t^3 - t^2 + t + 5$.

Пример 3: Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;-3)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $4x - 3$.

Решение: Согласно условию, имеем

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 3, \text{или}\, dy = (4x-3)dx.$$

Проинтегрировав, получим $y = 2x^2 - 3x + C$. Используя начальные условия $x = 2$ и $y = -3$, находим $C = -5$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $y = 2x^2 - 3x - 5$.

Пример 4: Вращающийся в жидкости диск замедляет свою угловую скорость за счет трения, причем сила трения пропорциональна угловой скорости. Найти: 1) скорость вращения диска в момент $t = 120$ с, если при $t = 0$ он вращался со скоростью $12\, рад/с$, а при $t = 10$ с его скорость стала $8\, рад/с$; 2) момент времени, когда скорость вращения диска окажется равной $1\, рад/с$.

Решение: Пусть ω – угловая скорость вращения диска в момент времени t тогда замедления вращения диска под воздействием силы трения равно $\frac{d\omega}{dt}$.

Согласно условию, $\frac{d\omega}{dt} = k\omega$, где k – коэффициент пропорциональности. Разделив переменные и интегрируя, получим

$$\frac{d\omega}{\omega} = kdt, \int \frac{d\omega}{\omega} = k\int dt, \ln\omega = kt + C,$$

откуда $\omega = e^{kt+C} = e^{kt} \cdot e^{C}$, или

$$\omega = C_1 \cdot e^{kt}. \qquad (1)$$

Найдем постоянную величину C_1 при начальных условиях $\omega = 12\, рад/с$ при $t = 10$. Подставив эти значения в равенство (1), имеем $12 = C_1 \cdot e^{k \cdot 0}$, т.е. $12 = C_1$. Таким образом,

$$\omega = 12 \cdot e^{kt}. \qquad (2)$$

Найдем числовое значение k по следующим данным: $t = 10$ с и $\omega = 8\, рад/с$. Подставим эти значения в равенство (2):

$$8 = 12 \cdot e^{k \cdot 10},$$

$$e^{10k} = \frac{2}{3}, \quad 10k \lg e = \lg 2 - \lg 3,$$

$$k=\frac{\lg 2-\lg 3}{10\lg e}=-\frac{\lg 3-\lg 2}{10\lg e}=\frac{0,4771-0,3010}{10\cdot 0,4343}=-0,0405.$$

Подставив значение k в равенство (2), получим

$$\omega = 12\cdot e^{-0,0405\,t}. \qquad (3)$$

Найдем скорость вращения диска в момент времени $t=120$с. Подставим в равенство (3) значение $t=120$:

$$\omega = 12\cdot e^{-0,0405\cdot 120}=12\cdot e^{-4,9}=0,09(рад/с).$$

Определяем, в какой момент времени диск будет вращаться со скоростью $1(рад/с)$. Подставив в соотношение (3) значение $\omega=1$, имеем

$$1=12\cdot e^{-0,0405t}, e^{-0,0405t}=\frac{1}{12};-0,0405t\lg e=\lg 1-\lg 12,$$

$$t=\frac{\lg 12}{0,0405\lg e}=61(с).$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите закон движения тела по оси $0y$, если оно начало двигаться из точки $M(0;6)$ со скоростью $\upsilon = 4t-6t^2$.

2. Дано уравнение скорости движения локомотива . Составьте уравнение пути поезда, если локомотив прошел за первые 4 с путь, равный20 м.
3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;-1)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k=\frac{1}{2y}$.
4. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(1;4)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью $0y$.

Практическое занятие 6

Решение прикладных задач с применением числовых рядов.

Цель: сформировать практические умения и навыки применять теорию числовых рядов при решении задач.

Числовой ряд – это выражение вида $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ Числа $a_1, a_2, .., a_n ...$ называются *членами ряда*. Они образуют бесконечную последовательность.

Общий член ряда – это член a_n с произвольным номером. Сокращенно ряд обозначают следующим образом: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Частичные суммы ряда – это суммы конечного числа членов ряда.

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Пример 1: Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+6}{5}$. Найти S_2, S_4.

Решение: 1) $S_2 = a_1 + a_2, S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

$a_1 = \frac{3 \cdot 1 + 6}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8,$

2) $a_2 = \frac{3 \cdot 2 + 6}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4,$ $S_2 = 1{,}8 + 2{,}4 = 4{,}2,$

$S_4 = 1{,}8 + 2{,}4 + 3 + 3{,}6 = 10{,}8.$

$a_3 = \frac{3 \cdot 3 + 6}{5} = \frac{15}{5} = 3,$

$a_4 = \frac{3 \cdot 4 + 6}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6$

Ответ: $S_2 = 4{,}2, S_4 = 10{,}8.$

Пример 2: Найти сумму членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$.

Решение: Находим частичные суммы членов ряда:

$S_1 = u_1 = \frac{1}{3}$; $S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$; $S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$;

$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}; ....$

Запишем последовательность частичных сумм: $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},...,\frac{n}{2n+1},...$.

Общий член этой последовательности есть $\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$.

Следовательно,

$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$. Итак, ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Признаки сходимости ряда

1. **Необходимый признак сходимости:** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n (при $n\to\infty$). $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Пример 3. Исследовать ряд по необходимому признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+5}$.

Решение: Находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{1000n}{n}+\frac{5}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1000+\frac{5}{n}}=\frac{1}{1000+0}=\frac{1}{1000}\neq 0.$$

Следовательно, ряд расходится.

2. **Признак Даламбера:** Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами. Если для этого ряда существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$, то при ***p*< *1*** ряд сходится, а при ***p*> *1*** ряд расходится. (При ***p* = *1*** вопрос о сходимости ряда остается нерешенным в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов).

Пример 4: Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^{n+5}}.$$

Решение: Преобразуем выражение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^5\cdot 3^{n+1}}{3^{n+1+1}\cdot n^5}=\frac{(n+1)^5}{n^5}\cdot\frac{3^{n+1}}{3^{n+2}}=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^5.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\frac{1}{3}<1$. Ряд сходится по признаку Даламбера.

3. **Признак Коши:** Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами. Если для этого ряда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то при ***q< 1*** ряд сходится, а при ***q> 1*** ряд расходится. (При ***q = 1*** вопрос о сходимости ряда остается нерешенным в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов).

Пример 4. Исследовать ряд по признаку Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$$

Следовательно, ряд сходится.

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1. Найдите первые пять членов ряда по его заданному общему члену. Найти частичные суммы S_2 и S_4.

1) $u_n=\frac{2n}{2n-1}$; 2) $u_n=\frac{2^n+3}{2^{n+1}}$; 3) $u_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$; 4) $u_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость. Самостоятельно определить и указать признак сходимости

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-2n^2+1}{5n^4-8n+2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{2n^3+1}\right)^n$.

Практическое занятие 7

Решение прикладных задач с использованием комбинаторики.

Цель: закрепить практические навыки применения формул комбинаторики при решении прикладных ситуационных задач.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Перестановками из *n*-элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга только порядком расположения.

Обозначение числа перестановок из *n*-элементов:

$P_n = n!$, n – количество элементов,
$n!$ («эн факториал») $= 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$.

РАЗМЕЩЕНИЯ

1) **Теорема о выборе двух элементов с учетом их порядка**

Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести $n(n-1)$ способами:

$A_n^2 = n(n-1)$, где A_n^2 - **число размещений из *n*элементов по 2.**

2) **Размещениями из *m* элементов по *n*** называются такие соединения, которые содержат n элементов из множества m элементов и отличаются друг от друга либо самими элементами (состав), либо порядком их расположения.

Обозначение числа размещений: $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$, m – общее количество элементов, n – количество отбираемых элементов.

СОЧЕТАНИЯ

В случаях, в которых порядок не важен, используем *сочетания.*

1) Теорема о выборе двух элементов без учета их порядка

Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать два элемента без учета их порядка, то такой выбор можно произвести $\dfrac{n(n-1)}{2}$ способами:

$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, где C_n^2 («цэ из эн по два») - **число сочетаний из *n* элементов по 2** (число всех выборов двух элементов *без учета их порядка* из *n* данных элементов).

2) Число сочетаний из *n* элементов по *k*:

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n!$ («эн факториал») = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

3) Формула для упрощения вычислений:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad C_{15}^{13} = C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105.$$

4) Количество выборов *n* элементов из *n* элементов:

$C_n^n = 1$, т.к.

такой выбор единственный – надо взять все множество целиком.

5) Количество выборов 0 элементов из *n* элементов:

$C_n^0 = 1$,

т.к. такой «выбор» единственный - ничего не выбираем.

Пример 1: Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега Спартакиады на 8 беговых дорожках?

Решение: Число способов равно числу перестановок из 8 элементов. По формуле числа перестановок находим, что

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320.$$

Пример 2:Группа 21 ТПС в 3-ем семестре изучают 13 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 3различных предмета?

Решение: Любое расписание на один день, составленное из 3 различных предметов, отличается от другого либо предметами, либо порядком следования предметов. Значит, в этом примере речь идет о размещениях из 13 элементов по 3.

$$A_{13}^3 = \frac{13!}{(13-3)!} = \frac{13!}{10!} = 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716.$$

Пример 3: Из 20студентовучебной группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение: Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетанияхиз 20 элементов по 3.

Имеем:

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!\cdot 3!} = \frac{20!}{17!\cdot 3!} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{6} = 3\cdot 19\cdot 20 = 1140.$$

Пример 4: Из ящика с инструментами, в котором лежит 9 напильников и 6 гаечных ключей, надо выбрать 3 напильника и 2 гаечных ключа. Сколькими способами можно мастер производственного обучения может сделать такой выбор?

Решение: Выбрать 3 напильника из 9 можно C_9^3 способами, а выбрать 2 гаечных ключа из 6 можно C_6^2 способами. Так как при каждом выборе напильниковгаченые ключи можно выбрать C_6^2 способами, то сделать выбор инструментов, о которых говорится в задаче, можно $C_9^3 \cdot C_6^2$ способами.

Имеем:

$$C_9^3 \cdot C_6^2 = \frac{9!}{6!\cdot 3!} \cdot \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 5\cdot 6}{6\cdot 2} = 7\cdot 4\cdot 9\cdot 5 = 1260.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Сколькими способами могут быть расставлены 5 участниц финального забега Спартакиады на 5-ти беговых дорожках?
2. Вычислить P_6, A_{12}^6, C_{11}^5.
3. Сократить дробь $\frac{12!}{6!}, \frac{(20-11)!}{4!}, \frac{(7+5)!\cdot 3!}{11!}$.
4. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 3 поезда?
5. Сколько существует перестановок букв слова «машинист», в которых буквы **м, а, ш** стоят рядом?
6. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это учебники по конструкции и ремонту вагонов, так, чтобы учебники стояли рядом в произвольном порядке?
7. В ВТЖТ организованы соревнования по футболу, в которых участвуют 12 студенческих команд. Каждая команда провела с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника. Сколько всего игр было сыграно?

Практическое занятие 8

Решение прикладных задач на нахождение вероятности события.

Цель: закрепить практические навыки применения формул теории вероятностей при решении прикладных задач.

Краткие теоретические сведения

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события А определяется формулой

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B);$$

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь его исходами, несовместны.

Событие, противоположное событию A(то есть не наступление события A), обозначают $\overline{A}$. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло, называется ***условной вероятностью*** события A при условии B и обозначается $P_B(A)$.

События $A,B,C,\ldots$ называются ***независимыми в совокупности***, если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или не наступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

Если A и B – независимые события, то

$$P(B)-P_A(B)=P_{\overline{A}}(B).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

Пример 1. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Решение: а) Извлеченная стандартная деталь не могла быть утеряна; могла быть потеряна любая из остальных 30 деталей (21+10 – 1= 30), причем среди них было 20 стандартных (21 – 1 = 20). Вероятность того, что была потеряна стандартная деталь, $P=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

б) Среди 30 деталей, каждая из которых могла быть утеряна, было 10 нестандартных. Вероятность того, что потеряна нестандартная деталь, $P=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

Пример 2: В распределительном пункте (РП) установлено <u>шесть</u> автоматических выключателей. Нормальная работа потребителей обеспечивается при их исправном состоянии. При монтаже РП выключатели выбирались из партии объемом в 900 штук, в которой было 850 исправных выключателей и 50 неисправных. Найти вероятность исправной работы РП.

Решение: Общее число элементарных исходов равно числу сочетаний из 900 элементов по 6, то есть C_{900}^{6}.

Число исходов, благоприятствующих исправной работе распределительного пункта, то есть C_{850}^{6}.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, к общему числу возможных элементарных исходов: $P=\frac{C_{900}^{6}}{C_{850}^{6}}\approx 0,74$.

Пример 3. В билете 3 раздела. Из 40 вопросов первого раздела студент знает 30 вопросов, из 30 вопросов второго – 15, из 30 вопросов третьего – 10. Определить вероятность правильного ответа студента по билету.

Решение: Учитывая, что ответ на каждые разделы есть независимые события A_1, A_2 и A_3, а их вероятности соответственно равны:

$$P(A_1)=\frac{30}{40}=\frac{3}{4};\ P(A_2)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2};\ P(A_3)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

Тогда вероятность правильного ответа на билет $P(B)$, можно найти по формуле:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=0{,}125.$$

Приер 4. На склад ежедневно поступают детали с трех предприятий. С первого – 30 деталей, со второго – 20и с третьего – 40. Установлено, что 2, 4 и % продукции этих предприятий, соответственно, имеют дефекты. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь будет дефектна.

Решение: Обозначим: $B-$ взятая наугад деталь дефектна; A_1 – деталь изготовлена на первом предприятии; A_2 – деталь изготовлена на втором предприятии; A_3 – деталь изготовлена на третьем предприятии. События A_1, A_2 и A_3 образуют полную группу несовместных событий и

$$P(A_1)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3};\ P(A_2)=\frac{20}{90}=\frac{2}{9};\ P(A_3)=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}.$$

Условные вероятности события B равны:

$P_{A_1}(B)=0{,}02;\ P_{A_2}(B)=0{,}04;\ P_{A_3}(B)=0{,}05.$

Тогда

$$P(B)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(B)+P(A_3)\cdot$$
$$\cdot P_{A_3}(B)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}02+\frac{2}{9}\cdot 0{,}04+\frac{4}{9}\cdot 0{,}05=0{,}0378.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Из букв «осмотрщик» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: А – согласной; В – гласной; С – буква «о».
2. Отдел дефектоскопии ремонтно-локомотивного депо проверяет колесные пары на наличие дефектов, соблюдая нормы безопасных условий труда. Вероятность того, что колесная пара без дефектов, равна 0,7. Найти вероятность того, что из двух проверенных колесных пар только одна без дефектов.
3. В вагонное депо поступили вагоны, 60 % которых поставило первое предприятие, 25 % – второе и 15 % – третье. Какова вероятность того, что вагон изготовлен на первом или третьем предприятии.
4. Студент пришел на зачёт, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос?
5. Для сигнализации об аварии на участке пути установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии

сигнализатор сработает, равна 0,85 для первого сигнализатора и 0,8 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Практическое занятие 9

Применение обыкновенных дифференциальных уравнений при решении прикладных задач.

Цель: сформировать практические умения применять теорию дифференциальных уравнений при решении прикладных задач.

Пример 1: Найти закон движения тела по оси $0x$, если оно начало двигаться из точки $M(4;0)$ со скоростью $\upsilon = 2t + 3t^2$.

Решение: При прямолинейном движении скорость есть производная от пути по времени. Обозначив путь через x, имеем $\upsilon = \frac{dx}{dt}$; тогда $\frac{dx}{dt} = 2t + 3t^2$, или $dx = (2t + 3t^2)dt$. Проинтегрировав, получим $x = t^2 + t^3 + C$. Так как $x = 4$ при $t = 0$, то, подставив эти значения в общее решение, находим $C = 4$. Итак, закон движения тела имеет вид $x = t^2 + t^3 + 4$.

Пример 2: Дано уравнение скорости движения локомотива

.

Найти уравнение пути, если локомотив за первые 2с прошел путь 11 м.

Решение:При прямолинейном движении скорость есть производная от пути по времени.Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$v = s',$$

$$v = \frac{ds}{dt},$$

$$2t^2 - 2t + 1 = \frac{ds}{dt} \quad \textit{или} \quad (2t^2 - 2t + 1) \cdot dt = ds$$

Проинтегрировав, получим $s = t^3 - t^2 + t + C$. Так как за первые 2 с локомотив прошел путь 11 м, то, подставив эти значения в общее решение, находим $C = 5$. Следовательно, уравнение пути локомотива имеет вид: $s = t^3 - t^2 + t + 5$.

Пример 3: Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;-3)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $4x-3$.

Решение: Согласно условию, имеем

$$\frac{dy}{dx}=4x-3, \text{или}\, dy=(4x-3)dx.$$

Проинтегрировав, получим $y=2x^2-3x+C$. Используя начальные условия $x=2$ и $y=-3$, находим $C=-5$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $y=2x^2-3x-5$.

Пример 4: Вращающийся в жидкости диск замедляет свою угловую скорость за счет трения, причем сила трения пропорциональна угловой скорости. Найти: 1) скорость вращения диска в момент $t=120$ с, если при $t=0$ он вращался со скоростью $12\,рад/с$, а при $t=10$с его скорость стала $8\,рад/с$; 2) момент времени, когда скорость вращения диска окажется равной $1\,рад/с$.

Решение: Пусть $\omega-$ угловая скорость вращения диска в момент времени t тогда замедления вращения диска под воздействием силы трения равно $\frac{d\omega}{dt}$.

Согласно условию, $\frac{d\omega}{dt}=k\omega,$ где $k-$ коэффициент пропорциональности. Разделив переменные и интегрируя, получим

$$\frac{d\omega}{\omega}=kdt, \int\frac{d\omega}{\omega}=k\int dt, \ln\omega=kt+C,$$

откуда $\omega=e^{kt+C}=e^{kt}\cdot e^{C}$, или

$$\omega=C_1\cdot e^{kt}. \qquad (1)$$

Найдем постоянную величину C_1 при начальных условиях $\omega=12\,рад/с$ при $t=10$. Подставив эти значения в равенство (1), имеем $12=C_1\cdot e^{k\cdot 0}$, т.е. $12=C_1$. Таким образом,

$$\omega=12\cdot e^{kt}. \qquad (2)$$

Найдем числовое значение k по следующим данным: $t=10$ с и $\omega=8\,рад/с$. Подставим эти значения в равенство (2):

$$8 = 12 \cdot e^{k \cdot 10},$$

$$e^{10k} = \frac{2}{3}, \quad 10k \lg e = \lg 2 - \lg 3,$$

$$k = \frac{\lg 2 - \lg 3}{10 \lg e} = -\frac{\lg 3 - \lg 2}{10 \lg e} = \frac{0,4771 - 0,3010}{10 \cdot 0,4343} = -0,0405.$$

Подставив значение k в равенство (2), получим

$$\omega = 12 \cdot e^{-0,0405t}. \qquad (3)$$

Найдем скорость вращения диска в момент времени $t = 120$с. Подставим в равенство (3) значение $t = 120$:

$$\omega = 12 \cdot e^{-0,0405 \cdot 120} = 12 \cdot e^{-4,9} = 0,09(рад/с).$$

Определяем, в какой момент времени диск будет вращаться со скоростью $1(рад/с)$. Подставив в соотношение (3) значение $\omega = 1$, имеем

$$1 = 12 \cdot e^{-0,0405t}, e^{-0,0405t} = \frac{1}{12}; -0,0405t \lg e = \lg 1 - \lg 12,$$

$$t = \frac{\lg 12}{0,0405 \lg e} = 61(с).$$

Задания для самостоятельного решения

5. Найдите закон движения тела по оси $0y$, если оно начало двигаться из точки $M(0;6)$ со скоростью $\upsilon = 4t - 6t^2$.

6. Дано уравнение скорости движения локомотива . Составьте уравнение пути поезда, если локомотив прошел за первые 4 с путь, равный20 м.

7. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;-1)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k = \frac{1}{2y}$.

8. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(1;4)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью $0y$.

Практическое занятие 10

Решение прикладных задач с применением числовых рядов.

Цель: сформировать практические умения и навыки применять теорию числовых рядов при решении задач.

Числовой ряд – это выражение вида $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ Числа $a_1, a_2, .., a_n ...$ называются *членами ряда*. Они образуют бесконечную последовательность.

Общий член ряда – это член a_n с произвольным номером. Сокращенно ряд обозначают следующим образом: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Частичные суммы ряда – это суммы конечного числа членов ряда.

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Пример 1: Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+6}{5}$. Найти S_2, S_4.

Решение: 1) $S_2 = a_1 + a_2, S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

$$a_1 = \frac{3 \cdot 1 + 6}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8,$$

2) $a_2 = \frac{3 \cdot 2 + 6}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4,$ $S_2 = 1{,}8 + 2{,}4 = 4{,}2,$

$S_4 = 1{,}8 + 2{,}4 + 3 + 3{,}6 = 10{,}8.$

$$a_3 = \frac{3 \cdot 3 + 6}{5} = \frac{15}{5} = 3,$$

$$a_4 = \frac{3 \cdot 4 + 6}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6$$

Ответ: $S_2 = 4{,}2, S_4 = 10{,}8.$

Пример 2: Найти сумму членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$.

Решение: Находим частичные суммы членов ряда:

$S_1 = u_1 = \frac{1}{3}$; $S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$; $S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$;

$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}$;....

Запишем последовательность частичных сумм: $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},...,\frac{n}{2n+1},...$.

Общий член этой последовательности есть $\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$.

Следовательно,

$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$. Итак, ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Признаки сходимости ряда

4. **Необходимый признак сходимости:** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n (при $n\to\infty$). $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Пример 3. Исследовать ряд по необходимому признаку $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+5}$.

Решение: Находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{1000n}{n}+\frac{5}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1000+\frac{5}{n}}=\frac{1}{1000+0}=\frac{1}{1000}\neq 0.$$

Следовательно, ряд расходится.

5. **Признак Даламбера:** Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами. Если для этого ряда существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$, то при $p<1$ ряд сходится, а при $p>1$ ряд расходится. (При $p=1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов).

Пример 4: Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^{n+5}}.$$

Решение: Преобразуем выражение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^5\cdot 3^{n+1}}{3^{n+1+1}\cdot n^5}=\frac{(n+1)^5}{n^5}\cdot\frac{3^{n+1}}{3^{n+2}}=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^5.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5=\dfrac{1}{3}<1$. Ряд сходится по признаку Даламбера.

6. **Признак Коши:** Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами. Если для этого ряда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то при ***q< 1*** ряд сходится, а при ***q> 1*** ряд расходится. (При ***q = 1*** вопрос о сходимости ряда остается нерешенным в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов).

Пример 4. Исследовать ряд по признаку Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$$

Следовательно, ряд сходится.

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1. Найдите первые пять членов ряда по его заданному общему члену. Найти частичные суммы S_2 и S_4.

1) $u_n=\dfrac{2n}{2n-1}$; 2) $u_n=\dfrac{2^n+3}{2^{n+1}}$; 3) $u_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{n}$; 4) $u_n=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$.

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость. Самостоятельно определить и указать признак сходимости

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3-2n^2+1}{5n^4-8n+2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{2n^3+1}\right)^n$.

Практическое занятие 11

Решение прикладных задач с использованием комбинаторики.

Цель: закрепить практические навыки применения формул комбинаторики при решении прикладных ситуационных задач.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Перестановками из *n*-элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга только порядком расположения.

Обозначение числа перестановок из *n*-элементов:

$P_n = n!$, n – количество элементов,
$n!$ («эн факториал») $= 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n.$

РАЗМЕЩЕНИЯ

1) **Теорема о выборе двух элементов с учетом их порядка**

Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести $n(n-1)$ способами:

$A_n^2 = n(n-1)$, где A_n^2 - **число размещений из *n*элементов по 2.**

2) **Размещениями из *m* элементов по *n*** называются такие соединения, которые содержат n элементов из множества m элементов и отличаются друг от друга либо самими элементами (состав), либо порядком их расположения.

Обозначение числа размещений: $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$, m – общее количество элементов, n – количество отбираемых элементов.

СОЧЕТАНИЯ

В случаях, в которых порядок не важен, используем *сочетания.*

1) Теорема о выборе двух элементов без учета их порядка

Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать два элемента без учета их порядка, то такой выбор можно произвести $\dfrac{n(n-1)}{2}$ способами:

$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, где C_n^2 («цэ из эн по два») - **число сочетаний из *n* элементов по 2** (число всех выборов двух элементов *без учета их порядка* из *n* данных элементов).

2) Число сочетаний из *n* элементов по *k*:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n! \text{ («эн факториал») } = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n.$$

3) Формула для упрощения вычислений:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \; C_{15}^{13} = C_{15}^2 = \frac{15\cdot14}{2!} = 105.$$

4) Количество выборов *n* элементов из *n* элементов:

$C_n^n = 1$, т.к.

такой выбор единственный – надо взять все множество целиком.

5) Количество выборов 0 элементов из *n* элементов:

$C_n^0 = 1$,

т.к. такой «выбор» единственный - ничего не выбираем.

Пример 1: Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега Спартакиады на 8 беговых дорожках?

Решение: Число способов равно числу перестановок из 8 элементов. По формуле числа перестановок находим, что

$$P_8 = 8! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = 40320.$$

Пример 2:Группа 21 ТПС в 3-ем семестре изучают 13 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 3различных предмета?

Решение: Любое расписание на один день, составленное из 3 различных предметов, отличается от другого либо предметами, либо порядком следования предметов. Значит, в этом примере речь идет о размещениях из 13 элементов по 3.

$$A_{13}^3 = \frac{13!}{(13-3)!} = \frac{13!}{10!} = 11\cdot12\cdot13 = 1716.$$

Пример 3: Из 20студентовучебной группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение: Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетанияхиз 20 элементов по 3.

Имеем:

$$C_{20}^{3}=\frac{20!}{(20-3)!\cdot 3!}=\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{18\cdot 19\cdot 20}{6}=3\cdot 19\cdot 20=1140.$$

Пример 4: Из ящика с инструментами, в котором лежит 9 напильников и 6 гаечных ключей, надо выбрать 3 напильника и 2 гаечных ключа. Сколькими способами можно мастер производственного обучения может сделать такой выбор?

Решение: Выбрать 3 напильника из 9 можно C_9^3 способами, а выбрать 2 гаечных ключа из 6 можно C_6^2 способами. Так как при каждом выборе напильниковгаченые ключи можно выбрать C_6^2 способами, то сделать выбор инструментов, о которых говорится в задаче, можно $C_9^3\cdot C_6^2$ способами.

Имеем:

$$C_9^3\cdot C_6^2=\frac{9!}{6!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 5\cdot 6}{6\cdot 2}=7\cdot 4\cdot 9\cdot 5=1260.$$

Задания для самостоятельного решения

8. Сколькими способами могут быть расставлены 5 участниц финального забега Спартакиады ВТЖТ на 5-ти беговых дорожках?
9. Вычислить P_6, A_{12}^6, C_{11}^5.
10. Сократить дробь $\frac{12!}{6!},\frac{(20-11)!}{4!},\frac{(7+5)!\cdot 3!}{11!}$.
11. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 3 поезда?
12. Сколько существует перестановок букв слова «машинист», в которых буквы **м, а, ш** стоят рядом?
13. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это учебники по конструкции и ремонту вагонов, так, чтобы учебники стояли рядом в произвольном порядке?
14. В ВТЖТ организованы соревнования по футболу, в которых участвуют 12 студенческих команд. Каждая команда провела с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника. Сколько всего игр было сыграно?

Практическое занятие 12

Решение прикладных задач на нахождение вероятности события.

Цель: закрепить практические навыки применения формул теории вероятностей при решении прикладных задач.

Краткие теоретические сведения

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события А определяется формулой

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B);$$

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь его исходами, несовместны.

Событие, противоположное событию A(то есть не наступление события A), обозначают $\overline{A}$. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло, называется ***условной вероятностью*** события A при условии B и обозначается $P_B(A)$.

События $A,B,C,\ldots$ называются ***независимыми в совокупности***, если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или не наступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

Если A и B – независимые события, то

$$P(B) - P_A(B) = P_{\overline{A}}(B).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Пример 1. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Решение: а) Извлеченная стандартная деталь не могла быть утеряна; могла быть потеряна любая из остальных 30 деталей (21+10 – 1= 30), причем среди них было 20 стандартных (21 – 1 = 20). Вероятность того, что была потеряна стандартная деталь, $P = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$.

б) Среди 30 деталей, каждая из которых могла быть утеряна, было 10 нестандартных. Вероятность того, что потеряна нестандартная деталь, $P = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$.

Пример 2: В распределительном пункте (РП) установлено шесть автоматических выключателей. Нормальная работа потребителей обеспечивается при их исправном состоянии. При монтаже РП выключатели выбирались из партии объемом в 900 штук, в которой было 850 исправных выключателей и 50 неисправных. Найти вероятность исправной работы РП.

Решение: Общее число элементарных исходов равно числу сочетаний из 900 элементов по 6, то есть C_{900}^6.

Число исходов, благоприятствующих исправной работе распределительного пункта, то есть C_{850}^6.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, к общему числу возможных элементарных исходов: $P = \dfrac{C_{900}^6}{C_{850}^6} \approx 0{,}74$.

Пример 3. В билете 3 раздела. Из 40 вопросов первого раздела студент знает 30 вопросов, из 30 вопросов второго – 15, из 30 вопросов третьего – 10. Определить вероятность правильного ответа студента по билету.

Решение: Учитывая, что ответ на каждые разделы есть независимые события A_1, A_2 и A_3, а их вероятности соответственно равны:

$$P(A_1)=\frac{30}{40}=\frac{3}{4};\ P(A_2)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2};\ P(A_3)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

Тогда вероятность правильного ответа на билет $P(B)$, можно найти по формуле:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=0{,}125.$$

Прием 4. На склад ежедневно поступают детали с трех предприятий. С первого – 30 деталей, со второго – 20и с третьего – 40. Установлено, что 2, 4 и % продукции этих предприятий, соответственно, имеют дефекты. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь будет дефектна.

Решение: Обозначим: $B-$ взятая наугад деталь дефектна; A_1 – деталь изготовлена на первом предприятии; A_2 – деталь изготовлена на втором предприятии; A_3 – деталь изготовлена на третьем предприятии. События A_1, A_2 и A_3 образуют полную группу несовместных событий и

$$P(A_1)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3};\ P(A_2)=\frac{20}{90}=\frac{2}{9};\ P(A_3)=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}.$$

Условные вероятности события B равны:

$P_{A_1}(B)=0{,}02;\ P_{A_2}(B)=0{,}04;\ P_{A_3}(B)=0{,}05.$

Тогда

$$P(B)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(B)+P(A_3)\cdot$$
$$\cdot P_{A_3}(B)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}02+\frac{2}{9}\cdot 0{,}04+\frac{4}{9}\cdot 0{,}05=0{,}0378.$$

Задания для самостоятельного решения

6. Из букв «осмотрщик» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: А – согласной; В – гласной; С – буква «о».
7. Отдел дефектоскопии ремонтно-локомотивного депо проверяет колесные пары на наличие дефектов, соблюдая нормы безопасных условий труда. Вероятность того, что колесная пара без дефектов, равна 0,7. Найти вероятность того, что из двух проверенных колесных пар только одна без дефектов.

8. В вагонное депо поступили вагоны, 60 % которых поставило первое предприятие, 25 % – второе и 15 % – третье. Какова вероятность того, что вагон изготовлен на первом или третьем предприятии.

9. Студент пришел на зачёт, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос?

10. Для сигнализации об аварии на участке пути установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,85 для первого сигнализатора и 0,8 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Задания для самостоятельного решения

1. В стране N 100 вокзалов. От любого вокзала до любого другого можно проехать. Через один из вокзалов хотят закрыть проезд так, чтобы между всеми остальными был возможен проезд. Докажите, что такой вокзал найдется.

2. В стране Z каждые 2 города соединены железными дорогами с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более, чем по двум железнодорожным путям.

3. На сайте сотрудников железных дорог ведется активная переписка, в которой участвуют пять человек. Докажите, что если каждый из пяти человек переписывается только с двумя другими, то не найдется трех человек, которые все переписываются между собой.

4. На банкет, посвященному дню рождения ОАО «РЖД», приехало множество людей из различных уголков страны. Один из гостей сказал: «Здесь не найдется девяти человек таких, чтобы каждый был знаком ровно с тремя другими». Прав ли он?

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основная:

1. Богомолов, Н. В. Математика[Электронный ресурс]: учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко.— М. : Юрайт, 2017. — 396 с. — Режим доступа: www.biblio-online.ru

2. Кремер, Н. Ш. Математика для колледжей[Электронный ресурс] : учеб. пособие для СПО / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера.— М. : Юрайт, 2018. — 346 с. — Режим доступа: www.biblio-online.ru

Дополнительная:

1. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Ч. 1[Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов.— М. : Юрайт, 2017. — 364 с. — Режим доступа: www.biblio-online.ru

2. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Ч.2[Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. —— М. : Юрайт, 2017. — 285 с. — Режим доступа: www.biblio-online.ru

3. Башмаков, М. И. Математика [Текст] : учеб. / М. И. Башмаков. - М. : КНОРУС, 2017. - 394 с. - (Среднее профессиональное образование).

4. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике в 2 ч.[Текст]: учеб. пособие для СПО / Н. В. Богомолов. – М. : Юрайт, 2017.